1. (a) $\sqrt{3}-j=2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}j)=2(\cos(-\pi/6)+j\sin(-\pi/6))$: module 2 et argument $-\pi/6$.

   (b) $(1-j)(1+3j)=1-j+3j+3=4+2j=2\sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}j)$: module $2\sqrt{5}$, argument $\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$.

   (c) Pour obtenir la forme cartésienne on écrit $(1+j\sqrt{2})^3=1+3j\sqrt{2}+3(j\sqrt{2})^2+(j\sqrt{2})^3=1-6+(3-2)j\sqrt{2}=-5+j\sqrt{2}$. Le module est donc $\sqrt{25+2}=\sqrt{27}$, et l'argument $\arccos(\frac{-5}{\sqrt{27}})$.

   (d) $\frac{1+j}{2-j}=\frac{(1+j)(2+j)}{5}=\frac{1+3j}{5}$. Le module est $\sqrt{10}/5$ et l'argument $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

2 4. On a $f(x)=\dfrac{1+j\tan x}{1-j\tan x}=\dfrac{(1+j\tan x)^2}{1+\tan^2 x}=\dfrac{1-\tan^2 x+2j\tan x}{1+\tan^2 x}$, donc la partie réelle de $f(x)$ est $\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ et la partie imaginaire $\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$.

   Mais d'autre part, en multipliant numérateur et dénominateur de $f(x)$ par $\cos x$, on constate que $f(x)=\dfrac{\cos x+j\sin x}{\cos x-j\sin x}=\dfrac{\exp(jx)}{\exp(-jx)}=\exp(2jx)$: le module est 1, l'argument est $2x$.

   Et enfin, en identifiant les parties réelles et imaginaires avec ces deux méthodes de calcul de $f(x)$ on obtient les relations $\cos(2x)=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ et $\sin(2x)=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$.

3 5. On a

$$\begin{aligned}
\sin 5\theta &= \mathrm{Im}[(\cos\theta+j\sin\theta)^5] \\
&= 5\sin\theta\cos^4\theta-10\sin^3\theta\cos^2\theta+\sin^5\theta \\
&= 5\sin\theta(1-\sin^2\theta)^2-10\sin^3\theta(1-\sin^2\theta)+\sin^5\theta \\
\sin 5\theta &= 16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta
\end{aligned}$$